Tentamen Vectoranalyse

27 augustus 2007, 9:00-12:00 uur

Het tentamen bestaat uit de onderstaande **vier** opgaven. Bij elk van de opgaven is het maximale aantal voor deze opgave te behalen punten vermeld. Je krijgt 10 punten gratis.

Opgave 1 (10+5+10 pt.)
Het oppervlak S is gegeven door de vergelijking

$$x^2 + y^2 - f(z) = 0,$$

waarbij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een C^2-functie is met $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$.

1. Bewijs dat het raakvlak aan S in $(0,0,0)$ horizontaal (evenwijdig aan het xy-vlak) is.

2. Bewijs dat het oppervlak S in de buurt van $(0,0,0)$ geschreven kan worden als grafiek van een C^1-functie g van twee variabelen, d.w.z.

   $$z = g(x, y),$$

   met $g(0,0) = 0$.

3. Je mag aannemen dat de functie g uit onderdeel 2 zelfs een C^2-functie is. Toon aan dat deze functie g in $(0,0)$ een lokaal minimum heeft.

Opgave 2 (12+8 pt.)
De functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is gegeven door $f(x,y,z) = x + yz$. Het boloppervlak S is gegeven door $g(x,y,z) = 0$, met $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

1. Toon aan dat f op S twee kritieke punten heeft.

2. Bepaal de maximale en minimale waarde van f op S.

Z.O.Z.

Opgave 3 (9+8+8 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ is gegeven door

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x}{r^3}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r^3}\,\mathbf{j} + \frac{z}{r^3}\,\mathbf{k},$$

waarbij $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

1. Bereken

$$\iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

   waarbij S_b het boloppervlak is met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ $(b > 0)$.

2. Het volume $B \subset \mathbb{R}^3$ heeft gladde rand ∂B, en bevat de oorsprong $(0,0,0)$ niet. Toon aan:

$$\iint_{\partial B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

3. De oorsprong $(0,0,0)$ ligt binnen een gesloten C^1-oppervlak S. Bereken

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Opgave 4 (6+14 pt.)
Het vectorveld $\mathbf{F}$ op $\mathbb{R}^3$ is gegeven door:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}, \tag{1}$$

waarbij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie is. Het oppervlak $S \subset \mathbb{R}^3$ is de grafiek van de functie f, dus

$$S = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}.$$

1. Bereken de rotatie van $\mathbf{F}$.

2. Bewijs dat voor elke enkelvoudige gesloten C^1-kromme C op S geldt:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$